

Sätze vom BOHMAN-KOROVKIN-Typ für lokalkonvexe Vektorverbände

Heiner Gonska

1 Einleitung

Wir betrachten das Schema

$$C(X) \xrightarrow[P]{T_n} F.$$

Hierin bezeichnet $C(X)$ den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum X und F einen lokalkompakten Vektorverband. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichne eine Folge positiver linearer Abbildungen und P einen Verbandshomomorphismus. In dieser Situation gilt der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Berens und Lorentz [1] darstellt.

Satz A

Sei F ein lokalkonvexer Vektorverband und $P : C(X) \rightarrow F$ ein Verbandshomomorphismus. Ist S eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und gilt für eine Folge positiver Abbildungen $T_n : C(X) \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n g \rightarrow P g \text{ in } F \text{ für alle } g \in G = \text{lin } S,$$

so folgt

$$T_n g \rightarrow P g \text{ in } F \text{ für alle } g \in \hat{G}_{\text{supp} P}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\text{supp} P} &= \{f \in C(X) : \mu(f) = f(x) \text{ für alle } x \in \text{supp} P \\ &\quad \text{und alle positiven Linearformen } \mu \text{ mit } \mu(g) = g(x) \\ &\quad \text{für alle } g \in G\} \end{aligned}$$

der Fortsetzungsraum bzgl. $\text{supp}P$ und G . Für einen Beweis siehe [2], Theorem 3.1. Hieraus ergibt sich unmittelbar

Satz B

Es sei F ein lokalkonvexer Vektorverband und $P : C(X) \rightarrow F$ ein Verbandshomomorphismus. Ist S eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und $G = \text{lin } S$, so gilt

$$\hat{G}_{\text{supp}P} \subset \rho(S, F, P).$$

Hierzu bezeichnet $\rho(S, F, P)$ den Schatten von S bzgl. $L^+(C(X), F)$ - der Menge aller positiven linearen Abbildungen von $C(X)$ nach F - und P , d.h.

$$\rho(S, F, P) = \{f \in C(X) : \text{Ist } (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^+(C(X), F) \text{ mit } T_n g \rightarrow P g \text{ für alle } g \in S, \text{ so folgt } T_n f \rightarrow P f\}.$$

2 Ergebnisse

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung eines Satzes von SCHEFFOLD [4].

Theorem 1 *Es sei E ein topologischer Vektorraum und ein Vektorverband und F ein lokalkonvexer Vektorverband, X sei eine kompakte Menge und $T : C(X) \rightarrow E$ ein Verbandshomomorphismus. Es sei $T_n : E \rightarrow F$ eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen und $P : E \rightarrow F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus. Es sei S eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und $G = \text{lin} S$.*

Es gelte

$$T_n(Tg) \rightarrow P(Tg) \text{ in } F \text{ für alle } g \in S.$$

Dann folgt

$$T_n(\bar{f}) \rightarrow P(\bar{f}) \text{ in } F \text{ für alle } \bar{f} \in \overline{T(\hat{G}_{\text{supp}P \circ T})}^E.$$

Beweis: $(T_n \circ T)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge positiver linearer Abbildungen mit

$$T_n \circ T : C(X) \rightarrow F.$$

$P \circ T : C(X) \rightarrow F$ ist ein Verbandshomomorphismus.

Nach Satz B gilt

$$\hat{G}_{\text{supp}P \circ T} \subset \rho(S, F, P \circ T).$$

Aus

$$T_n \circ T(g) \rightarrow P \circ T(g) \text{ in } F \text{ für alle } g \in S,$$

folgt also

$$T_n \circ T(h) \rightarrow P \circ T(h) \text{ in } F \text{ für alle } h \in \hat{G}_{\text{supp}P \circ T},$$

also

$$T_n(f) \rightarrow P(f) \text{ in } F \text{ für alle } f \in T(\hat{G}_{\text{supp}P \circ T}).$$

Sei nun $\bar{f} \in \overline{T(\hat{G}_{\text{supp}P \circ T})}^E$ und U eine beliebige Nullumgebung in F . Dann existiert eine Nullumgebung W in F mit

$$W + W + W \subset U.$$

Wegen der Gleichstetigkeit der Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert eine Umgebung V in E mit $T_n(V) \subset W$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Stetigkeit von P eine Umgebung V' mit $P(V') \subset W$. Es sei nun $h \in \hat{G}_{\text{supp}P \circ T}$ so gewählt, dass $\bar{f} - T(h) \in V \cap V'$ ist. Für $n \geq N_0$ ist dann

$$T_n \circ T(h) - P \circ T(h) \in W,$$

und insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccccccc} T_n \bar{f} & - & P \bar{f} & = & T_n \bar{f} & - & T_n \circ T(h) & + & T_n \circ T(h) & - & P \circ T(h) & + & P \circ T(h) & - & P \bar{f} \\ & & & & \in & & W & & & & W & & & & W \subset U \end{array}$$

für alle $n \geq N_0$. □

Bemerkung: SCHEFFOLD [4] hat Theorem 1 für einen lokalkonvexen Vektorverband E und einen injektiven Verbandshomomorphismus $T : C(X) \rightarrow E$ mit völlig anderen Mitteln bewiesen. Statt von Konvergenz auf dem Abschluss des Bildes eines Fortsetzungsraumes zu sprechen, verwendet SCHEFFOLD die Terminologie des relativen Choquetrandes.

Nach Theorem 1 sind natürlich solche Vektorverbände und topologische Vektorräume E von Interesse, in die ein Raum $C(X)$ vermöge einer natürlichen Inklusion eingebettet ist und für die gilt $\overline{i(C(X))}^E = E$. Eine Klasse solcher Räume bilden sogenannte Banachsche Funktionenräume. Dazu die

Definition 2 (MÜLLER) [3])

Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $M(K)$ der Vektorraum der auf K definierten reellwertigen (Lebesgue-)meßbaren Funktionen modulo des zugehörigen Nullraumes N . Ein Banach-Raum $(B(K), \|\circ\|_B)$ bestehend aus Elementen von $M(K)$ heißt ein *Banachscher Funktionenraum* genau dann, wenn seine Norm den folgenden Bedingungen genügt:

- (N1) Ist $g \in M(K)$ und $f \in B(K)$ mit $|g| \leq |f|$, so folgt: $g \in B(K)$ und $\|g\|_B \leq \|f\|_B$.
- (N2) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $B(K)$ und $0 \leq f_n \nearrow f$ mit $f \in B(K)$, so folgt: $\|f_n\|_B \rightarrow \|f\|_B$.
- (N3) $\|f\|_B$ ist umordnungsvariant für alle $f \in B(K)$, d.h.: Ist $f = f'$ λ -fast überall, so ist $f' \in B(K)$ und $\|f\|_B = \|f'\|_B$.

Beispiel (MÜLLER) [3])

Der Raum $L^p(K)$, $1 \leq p < \infty$ ist ein Banachscher Funktionenraum.

Für Banachsche Funktionenräume, die den Raum $C(K)$ enthalten, gilt der

Satz 3 (MÜLLER) [3])

Ist $K \subset \mathbb{R}$ und $B(K)$ ein Banachscher Funktionenraum, der den Raum $C(K)$ enthält, so ist $C(K)$ dicht in $B(K)$.

Um Theorem 1 anwenden zu können, benötigen wir noch

Lemma 4 *Ein Banachscher Funktionenraum $B(K)$ ist ein Banachverband.*

Beweis: Es seien f und $g \in B(K)$. Dann ist $\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$. Wegen (N1) sind $|f|, |g| \in B(K)$ und wegen $|f-g| \leq |f|+|g|$ ist auch $|f-g| \in B(K)$

und damit auch $\sup(f, g)$. Da $\inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ gilt, folgt, dass auch $\inf(f, g) \in B(K)$ ist. $B(K)$ ist also ein Vektorverband.

Eine Nullumgebungsbasis in $B(K)$ bilden die Normkugeln $K(0, \epsilon) = \{f \in B(K) : \|f\|_B \leq \epsilon\}$. Ist nun $g \in B(K)$ mit $|g| \leq |f|$ und $\|f\|_B \leq \epsilon$, so folgt mit (N1), dass $\|g\|_B \leq \|f\|_B \leq \epsilon$, also $g \in K(0, \epsilon)$ ist. Dies bedeutet aber, dass $K(0, \epsilon)$ solide ist, und der Banachraum und Vektorverband $B(K)$ besitzt eine Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen. $B(K)$ ist also ein Banachverband. \square

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung eines Satzes von Müller (MÜLLER) [3]).

Satz 5

Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $B(K)$ ein Banachscher Funktionenraum, der den Raum $C(K)$ enthält. Es sei S eine Teilmenge von $C(K)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und $G = \text{lin} S$. Es gelte $\hat{G}_K = C(K)$. Es sei $T_n : B(K) \rightarrow B(K)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge positiver linearer Operatoren mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n g - g\|_B = 0 \text{ für alle } g \in S.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_B = 0 \text{ für alle } f \in B(K).$$

Beweis: Die Injektion $i : C(K) \ni f \mapsto f \in B(K)$ ist ein Verbandshomomorphismus. Wegen $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ ist die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichstetig. Die Identität $I : B(K) \ni f \mapsto f \in B(K)$ ist ein stetiger Verbandshomomorphismus.

Mit Theorem 1 folgt also

$$T_n f \rightarrow I f \text{ in } B(K) \text{ für alle } f \in \overline{i(\hat{G}_{\text{supp } I \circ i})}^{B(K)}.$$

Nun ist

$$i(\hat{G}_{\text{supp } I \circ i}) \supset i(\hat{G}_K) = i(C(K)) = C(K),$$

also

$$\overline{i(\hat{G}_{supp I \circ i})}^{B(K)} = \overline{C(K)}^{B(K)} = B(K).$$

□

Mit Satz 5 ist es nun etwa möglich, den folgenden Approximationsprozess im Banachschen Funktionenraum $L^1[a, b]$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, auf Konvergenz gegen die Identität zu testen.

Beispiel 6

Für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1[a, b]$ sei

$$T_n(f, x) := \frac{1}{b-a} \circ \sqrt{\frac{n}{\pi}} \circ \int_a^b \left(1 - \left(\frac{t-x}{b-a}\right)^2\right)^n \circ f(t) dt.$$

Darin heißt

$$K_n(t, x) := \frac{1}{b-a} \circ \sqrt{\frac{n}{\pi}} \circ \left(1 - \left(\frac{t-x}{b-a}\right)^2\right)^n$$

Landau-Stieltjes-Kern.

T_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ linear und positiv, und für alle $f \in L^1[a, b]$ ist $T_n f \in \Pi_{2n} \subset L^1[a, b]$. Wie MÜLLER [3] zeigt, sind die Normen der T_n gleichmäßig beschränkt und für $0 \leq i \leq 2$ gilt $T_n \pi_i \rightarrow \pi_i$ in $L^1[a, b]$. Für $G = \text{lin}\{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}$ gilt $\hat{G}_K = C(K)$, so dass mit Satz 5 nun

$$T_n f \rightarrow f \text{ in } L^1[a, b] \text{ für alle } f \in L^1[a, b]$$

folgt.

□

Wir betrachten nun die spezielle Klasse lokalkonvexer Vektorverbände E , die folgenvollständig sind und im positiven Kegel einen quasiinneren Punkt besitzen. Es gilt folgendes

Theorem 7 (vgl. Scheffold [4]) *Es sei E ein lokalkonvexer, folgenvollständiger Vektorverband, $u \in E$ ein quasiinnerer Punkt des positiven Kegels E^+ von E und $\{u_i, i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von E mit*

$$\{u_i, i \in I\} \subset E_u = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : |x| \leq n \circ u\}.$$

Dann gilt:

- (i) Es gibt einen kompakten Raum X und einen surjektiven Verbandsisomorphismus $T : C(X) \rightarrow E_u$.
- (ii) Setzt man $u_i^{(2)} := T((T^{-1}(u_i))^2)$, so gilt: Ist F ein beliebiger lokalkonvexer Vektorverband, $P : E \rightarrow F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus und $T_n : E \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen mit

$$T_n v \rightarrow P v \text{ in } F \text{ für alle } v \in \{u\} \cup \{u_i, u_i^{(2)}; i \in I\},$$

so folgt

$$T_n f \rightarrow P f \text{ in } F \text{ für alle } f \in E.$$

- (iii) Wird E von k Elementen erzeugt, so kann die Konvergenz einer Folge gleichstetiger positiver linearer Abbildungen gegen einen stetigen Verbandshomomorphismus auf einer höchstens $(2k + 1)$ -elementigen Menge getestet werden.

Beweis: Nach Definition des quasiinneren Punktes u ist das Vektorverbandsideal $E_u = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : |x| \leq n \circ u\}$ dicht in E . Damit existieren also ein kompakter Hausdorffraum X und ein surjektiver Verbandsisomorphismus $T : C(X) \rightarrow E_u$ mit $T1_X = u$. Also gilt die Aussage (i).

Wir betrachten nun

$$Q := \{T^{-1}(u) = 1_X\} \cup \{T^{-1}(u_i); i \in I\} \cup \{(T^{-1}(u_i))^2; i \in I\} \subset C(X).$$

Der von dieser Teilmenge erzeugte Unterraum G von $C(X)$ besitzt die Eigenschaft, dass

$$\overline{\mathfrak{A}(Q)}^{C(X)} \subset \hat{G}_X \subset C(X).$$

Hierbei bezeichnet $\overline{\mathfrak{A}(Q)}^{C(X)}$ die kleinste abgeschlossene Teilalgebra, die Q enthält. Nun ist $\{u_i; i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von E , also auch von E_u . Diese Sprechweise ist sinnvoll, weil E_u selbst ein lokalkonvexer Vektorverband ist.

$\{T^{-1}(u_i); i \in I\} \subset \overline{\mathfrak{A}(Q)}$ ist also ein Erzeugendensystem des lokalkonvexen Vektorverbandes $C(X)$. Damit ist die abgeschlossene Algebra $\overline{\mathfrak{A}(Q)}$ ein

abgeschlossener Vektorunterverband von $C(X)$, der ein Erzeugendensystem von $C(X)$ enthält, also gilt

$$C(X) \subset \overline{\mathfrak{A}(Q)} \subset \hat{G}_X \subset C(X)$$

und damit

$$\hat{G}_X = C(X),$$

also

$$T(Q) \subset E_u = T(C(X)) = T(\hat{G}_X).$$

Nach Voraussetzung gilt weiter

$$E = \overline{E_u}^E = \overline{T(\hat{G}_X)}^E.$$

Ist nun $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen und $P : E \rightarrow F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus mit

$$T_n v \rightarrow P v \text{ in } F \text{ für alle } v \in \{u\} \cup \{u_i, u_i^{(2)}; i \in I\},$$

so bedeutet dies ja

$$T_n \circ T(q) \rightarrow P \circ T(q) \text{ in } F \text{ für alle } q \in Q.$$

Q enthält 1_X , also folgt mit Theorem 1:

$$T_n f \rightarrow P f \text{ in } F \text{ für alle } f \in \overline{T(\hat{G}_{\text{supp } P \circ T})}^E.$$

Wegen

$$E = \overline{T(C(X))}^E \supset \overline{T(\hat{G}_{\text{supp } P \circ T})}^E \supset \overline{T(\hat{G}_X)}^E = E$$

folgt also

$$T_n f \rightarrow P f \text{ in } F \text{ für alle } f \in E.$$

Also gilt die Aussage (ii).

Die Behauptung (iii) ergibt sich nun sofort aus (ii). □

Bemerkung: Endlich erzeugte, folgenvollständige lokal-konvexe Vektorverbände E sind insbesondere Gegenstand der Untersuchungen von WOLFF

[6, 7]. Als besonders interessant erweist es sich hier, dass in dieser Situation E automatisch einen quasiinneren Punkt u enthält. Ist etwa $A = \{u_1, \dots, u_k\}$ ein Erzeugendensystem von E (d.h. E ist der kleinste abgeschlossene Vektorunterverband, der A enthält), so setze man $u := \sum_{i=1}^k |u_i|$. Dann ist u ein quasiinnerer Punkt des positiven Kegels E^+ von E , d.h. E_u ist dicht in E . E_u ist ja ein A enthaltender Vektorunterverband von E .

Es gelingt Wolff [5], endlich erzeugte Banachverbände vollständig zu charakterisieren und als gewisse Funktionenräume (sogenannte Banach-Funktionenverbände) über geeigneten kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, darzustellen.

Im Spezialfall sogenannter minimaler und separabler Banachverbände gelingt es dabei sogar, auf ein Erzeugendensystem von nur zwei Elementen zu schließen.

Literatur

- [1] BERENS, H. UND LORENTZ, G.G.: Theorem of Korovkin Type for Positive Linear Operators on Banach Lattices. In: Approximation Theory, G.G. Lorentz, Ed., New York - London: Academic Press, 1-30 (1973).
- [2] GONSKA, H.: Konvergenzsätze von Bohman-Korovkin-Typ für positive lineare Operatoren. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1975.
- [3] MÜLLER, M.W.: Sätze vom Bohman-Korowkin-Typ für Banachsche Funktionenräume. In: Linear Operators and Approximation, P.L. Butzer, J.-P. Kahane und B.Sz.-Nagy, Ed., Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 292-299 (1972).
- [4] SCHEFFOLD, E.: Ein allgemeiner Korovkin-Satz für lokalkonvexe Vektorverbände. Math. Z. **132**, 209-214 (1973).
- [5] WOLFF, M.: Darstellung von Banach-Verbänden und Sätze vom Korovkin-Typ. Math. Ann. **200**, 47-67 (1973).
- [6] WOLFF, M.: Über Korovkin-Sätze in lokalkonvexen Vektorverbänden. Math. Ann. **204**, 44-56 (1973).

- [7] WOLFF, M.: A General Theorem of Korovkin Type for Vector Lattices.
In: Approximation Theory, G.G. Lorentz, Ed., New York - London:
Academic Press, 517-521 (1973).

Heiner Gonska
University of Duisburg-Essen
Faculty of Mathematics
D-47048 Duisburg
Germany
e-mail: heiner.gonska@uni-due.de